

ЖОҒАРЫ СЫНЫП ОҚУШЫЛАРЫНЫҢ МАТЕМАТИКАЛЫҚ САУАТТЫЛЫҒЫН ДАМУ: КОМБИНАТОРИКА ЖӘНЕ ЫҚТИМАЛДЫҚТАР ТЕОРИЯСЫ

Рыспаева Гүлбақыт Нұрлыбекқызы

ryspayeva02@bk.ru

7M01503 – «Математика. Білім беру үдерісін басқару»

білім беру бағдарламасының 1 курс магистранты

Х.Досмұхамедов атындағы Атырау университеті, Атырау қ, Қазақстан Республикасы

Ғылыми жетекшісі – **Мырзашева А.Н.**

тех.ғ.к., қауымд. профессор

Жаңартылған білім беру мазмұны оқушылардың функционалдық сауаттылығын, сыни тұрғыдан ойлау қабілетін қалыптастыруды басты бағыттардың бірі ретінде қарастырады. Халықаралық зерттеулер көрсеткендей, мектепте алған теориялық білімді практикада қолдану – білім сапасының маңызды көрсеткіші. Осыған байланысты мектеп оқушыларының математикалық сауаттылығын дамыту білім беру саласының өзекті мәселелерінің бірі.

Математикалық сауаттылық – бұл жеке тұлғаның логикалық, дәлелдеу және тұжырымдау дағдыларының жиынтығы. Ол тек есептерді шығару ғана емес, сонымен қатар алынған білімді өмірде тиімді қолдану қабілетін қамтиды. Қазіргі білім беру жүйесінде комбинаторика мен ықтималдықтар теориясы маңызды орын алады, себебі олар оқушылардың логикалық және сыни ойлау қабілеттерін дамытып, күрделі мәселелерді шешу дағдыларын қалыптастырады.

Ол нақты өмірдегі тәуекелдерді бағалау, шешім қабылдау және статистикалық мәліметтерді талдау дағдыларын қалыптастырады. Бұл теориялар экономика, медицина, инженерия, ақпараттық технологиялар т.б. көптеген салаларда кеңінен қолданылады.

Осы тұрғыда комбинаторика, ықтималдықтар теориясы мен математикалық статистика элементтері мектеп математика курсы мен Ұлттық бірыңғай тестілеу (ҰБТ) тапсырмалары құрамына енгізіліп отыр. Бұл оқушылардың математикалық сауаттылығын арттырып қана қоймай, олардың жоғары оқу орындарына түсуіне, болашақ мамандықтарына бейімделуіне және күнделікті өмірде дұрыс шешім қабылдауына көмектеседі. 2021-2024 жылдары аталған тақырыптарға арналған тапсырмалардың үлесі ұлғайған, бұл өзгеріс енгізілген тапсырмалардың білім беру бағдарламасындағы өзектілігін айқындай түседі.

Осыған байланысты мақалада мектеп бағдарламасында комбинаторика, ықтималдықтар теориясының белгіленген бөлімдерін оқытуда оқушыларға теориялық білім мен сәйкесті тапсырмаларды орындауға көмек ретінде есептер шығару үлгісі беріледі.

Ықтималдық анықтамасы және анықтама бойынша есептер шығаруға нұсқаулық:

Белгілі бір A оқиғасының ықтималдығы – бұл осы оқиғаға сәйкес келетін қолайлы жағдайлардың жалпы санының барлық мүмкін жағдайлар санына қатынасы.

Оқиғаның ықтималдығы $P(A)$ түрінде өрнектеледі де мына формула арқылы есетеледі:

$$P = \frac{m}{n},$$

мұндағы – n – мүмкін болатын барлық жағдайлардың саны; m – A оқиғасына пайда болуына қолайлы әсер ететін жағдайлардың саны.

Ықтималдықтың негізгі қасиеттері:

1. Ақиқат оқиғаның ықтималдығы 1-ге тең. Егер A оқиғасы міндетті түрде орындалатын болса, онда оның ықтималдығы $P(A) = 1$. Себебі бұл жағдайда барлық мүмкін жағдайлар осы оқиғаға сәйкес келеді, яғни $m = n$.

2. Мүмкін емес оқиғаның ықтималдығы 0-ге тең. Егер оқиға ешқашан орындалмаса, оған сәйкес келетін жағдайлар болмайды, яғни $m = 0$, сондықтан $P(A) = 0$.
3. Кез келген оқиғаның ықтималдығы 0 мен 1 аралығында болады. Яғни, $0 \leq P(A) \leq 1$. Бұл теңсіздік $0 \leq m \leq n$ болатынынан шығады. Барлық жағдайлар саны n –ге бөлгенде, ықтималдық осы аралықта қалады.

Классикалық ықтималдық анықтамасы бойынша есепті шығару үшін келесі қадамдарды орындау қажет:

1. Берілген есептің негізінде жүргізілетін тәжірибені анықтаймыз.
2. Оқиғаның тең мүмкіндікті және өзара үйлесімсіз екендігін тағайындаймыз.
3. Барлық мүмкін болатын элементар оқиғалардың жалпы санын, яғни n -ды есептейміз.
4. Ықтималдығы есептелетін А оқиғасын белгілейміз.
5. А оқиғасына сәйкес келетін қолайлы жағдайлардың санын m табамыз.
6. Жоғарыдағы ықтималдық анықтамасының формулансын пайдаланып, А оқиғасының ықтималдығын есептейміз.

Комбинаторика есептерін шешуге қажетті формулалар 1 кестеде келтірілген.

Кесте 1 – Теру, орналастыру және алмастыру формулалары

Теру	Орналастыру	Алмастыру
n элементтен k элементті таңдау	n элементтен k элементтен алынған орналастыру	n элементтен n элементті орналастыру немесе n элементті алмастыру
Реті маңызды емес	Реті маңызды	Реті маңызды
Элементтері қайталанбайтын теру $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$	Элементтері қайталанбайтын орналастыру $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$	Элементтері қайталанбайтын алмастыру $P = n!$
Элементтері қайталанатын теру $C_n^k = \frac{(k+n-1)!}{k!(n-1)!}$	Элементтері қайталанатын орналастыру $A_n^k = n^k$	Элементтері қайталанатын алмастыру $P(n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!}$

Есеп 1. Жолаушыларды орналастыру есебі. Төрт жолаушы вагонға кіреді, онда 6 бос орын бар. Оларды орналастырудың қанша тәсілі бар?

Шеуі. Алдымен 6 орыннан 4 орынды таңдау қанша тәсілмен жүзеге асатынын анықтайық:

$$C_6^4 = \frac{6!}{4!(6-4)!} = \frac{6!}{(4!2!)} = \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} = 15$$

4 орын таңдалғаннан кейін, 4 жолаушы осы орындарға әртүрлі тәсілдермен орналаса алады, яғни $4!$ (4-тің факториалы):

$$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24.$$

Енді орындарды таңдау тәсілдерінің саны мен жолаушыларды орналастыру тәсілдерінің санын көбейтеміз:

$$15 \cdot 24 = 360.$$

Демек, жолаушылар 360 тәсілмен орналаса алады.

Жауабы: 360 тәсіл.

Есеп 2. Заттарды таңдау есебі. Берілген n заттың бірнешеуін немесе барлығын таңдаудың қанша әдісі бар?

Шешуі. Әрбір затқа қатысты екі түрлі әрекетті орындауға болады: оны алу немесе алмау. Бір затқа қатысты таңдау тәсілі қалған заттармен жасалатын таңдаулармен үйлесуі мүмкін. Демек, жалпы таңдау саны:

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2 \text{ (} n \text{ көбейткіш)}$$

яғни, 2^n -ге тең. Алайда, бұл есепте ешбір зат таңдалмайтын жағдайды алып тастау керек. Сондықтан ізделген сан $2^n - 1$ -ге тең.

Жауабы: 1.

Есеп 3. Алты досы бар адам, достарының барлықтарын немесе кейбірін түскі асқа қанша тәсілмен шақыра алады?

Шешуі. Бізде 6 дос бар, және әрқайсысы үшін екі шешім қабылдауға болады: оны түскі асқа шақыру немесе шақырмау. Бұл 6 дос үшін бізде 2 нұсқа бар. Сондықтан достарды шақырудың жалпы санын былай есептеуге болады:

$$2^6 = 64$$

Алайда, бұл санға ешкімді шақырмайтын жағдайды (яғни, бос жиын) қосамыз, ол тапсырманың шартына сәйкес келмейді (барлығын немесе кейбірін шақыруымыз керек). Сондықтан біз бұл жағдайды алып тастауымыз керек:

$$64 - 1 = 63$$

Осылайша, 6 досты түскі асқа шақырудың, барлығын немесе кейбірін шақыру арқылы, 63 түрлі тәсілі бар.

Жауабы: 63 тәсіл

Есеп 4. n затты p адамға қанша тәсілмен таратуға болады, егер әрбір адамның ала алатын заттар санына ешқандай шектеу қойылмаса?

Шешуі. Әрбір затты p адамның кез келгеніне беруге болады. Сондықтан, әрбір зат үшін p таңдау бар. Барлығы n зат болғандықтан, жалпы тарату тәсілдерінің саны:

$$p^n$$

Егер, мысалы, $n = 3$ зат және $p = 2$ адам болса, онда заттарды тарату тәсілдерінің саны:

$$2^3 = 8$$

Бұл тәсілдер келесідей болуы мүмкін (егер адамдарды А және В деп белгілесек, ал заттарды 1, 2, 3 деп нөмірлесек):

1. (A, A, A)
2. (A, A, B)

3. (A, B, A)
4. (A, B, B)
5. (B, A, A)
6. (B, A, B)
7. (B, B, A)
8. (B, B, B)

Жауабы: p^n

Есеп 5. 5 затты 2 адамға қанша тәсілмен бөлуге болады?

Шешуі. Әрбір затты не біріншісі, не екіншісі алуы мүмкін, сондықтан таңдау саны:

$$2^5 = 32$$

Алайда, бұл санға екі қосымша жағдай кіреді: бір адам барлық 5 затты алып, екіншісі ештеңе алмайтын жағдайлар. Мұндай 2 жағдайды алып тастасақ:

$$2^5 - 2 = 32 - 2 = 30$$

Жауабы: 30 тәсіл.

Есеп 6. 3 жаңғақ, 4 алма және 2 апельсин бар. Егер әрбір жемісті кем дегенде 1 рет алу қажет болса, таңдау комбинацияларының саны қанша болады?

Шешуі. Әрбір түрдің кем дегенде бір данасын алу керек. Бұрынғы есептерден білеміз, әрбір топтың таңдау саны мынаған тең:

- 3 жаңғақ: $2^3 - 1 = 7$
- 4 алма: $2^4 - 1 = 15$
- 2 апельсин: $2^2 - 1 = 3$

Барлық таңдау бір-бірімен үйлесетіндіктен, олардың көбейтіндісін аламыз:

$$7 \times 15 \times 3 = 315$$

Жауабы: 315 тәсіл.

Ықтималдықтар теориясында есептерді шешу кезінде n және k мәндерін дұрыс анықтау маңызды рөл атқарады. Белгіленген мәндерді тиісті формулаға орналастыру арқылы есептерді оңай шешуге болады. Сондай-ақ, ықтималдықтарды қосу және көбейту қағидаларына негізделген есептер де жиі кездеседі. Енді осы тақырыпқа байланысты ҰБТ-да берілген есептердің бірнеше шешу тәсілдерін және олардың түрлі үлгілерін мысалдармен қарастырайық.

Есеп 7. Астанада қаңтардың бірі күніндегі ауа райының ашық болу ықтималдығы $p = 0,65$. Сол күнгі ауа райының бұлтты болу ықтималдығын табыңыз.

А) 0,45 В) 0,15 С) 0,35 Д) 0,55

Шешуі. Біз бұл есепті шешу үшін оқушыға ықтималдықтың қасиеттерін білсе жеткілікті. Мұғалім сабақта ықтималдықтың қасиеттеріне есептер шығартып уйрету керек.

$$p = 1 - 0,65 = 0,35$$

Жауабы: 0,35, С нұсқасы.

Есеп 8. ҚАЗАҚСТАН сөзінен кездейсоқ бір әріп таңдалды. Таңдалған әріптің А әріпі болу ықтималдығы қандай?

А) 1/9 В) 2/3 С) 2/9 Д) 1/3 Е) 1

Шешуі. ҚАЗАҚСТАН сөзінде барлығы 9 әріп бар, демек жалпы жағдайлар саны 9-ға тең. Осы сөзде А әріпі 3 рет кездеседі, яғни қолайлы оқиғалар саны 3-ке тең. Ықтималдықтың формуласы бойынша:

$$P = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

Жауабы: 1/3, Д нұсқасы.

Есеп 9. Клиент банк картасын алған кезде, оның соңғы үш саны кездейсоқ таңдалады. Бұл үш санның кемитін ретпен орналасу ықтималдығы қандай (мысалы, 876 немесе 432)?

Шешуі. Бұл есеп **комбинаторика** ережелеріне негізделген. Банк картасының соңғы үш цифры еркін таңдалады, яғни әрбір цифр 10 мәннің біріне тең бола алады (0-ден 9-ға дейін). Сондықтан **барлық мүмкін үш цифрлы комбинация саны:**

$$n = 10 \times 10 \times 10 = 1000$$

Қолайлы жағдайларды қарастырайық: Үш санның кемитін ретпен орналасуы үшін, біз келесі комбинацияларды таңдай аламыз:

987, 876, 765, 654, 543, 432, 321, 210

Яғни, 8 қолайлы комбинация бар. Сондықтан ықтималдық:

$$P = \frac{8}{1000} = 0.008.$$

Жауабы: 0,008.

Есеп 10. Ойын сүйегін бірнеше рет лақтырғанда, барлық шыққан сандардың қосындысы 6-дан асып кетуі үшін кем дегенде қанша рет лақтыру керек? (Жауапты

пайызбен дөңгелектеңіз.)

Шешуі. Бірінші лақтыруда ең аз мән 1 болғандықтан, бірден 6-дан асып кете алмаймыз. Екі сүйек лақтырылғанда, олардың жалпы мүмкін комбинация саны:

$$6 \times 6 = 36$$

Келесі қадам – 6-дан үлкен қосынды шығатын нәтижелерді санау. Ол үшін барлық мүмкін комбинацияларды қарастырып, қанша жағдайда 6-дан үлкен мән алынатынын анықтау керек.

Екі рет сүйек лақтырғанда түскен ұпайлардың қосындысы 6-дан үлкен болатын нәтижелер 2-кестеде келтірілген.

Кесте 2 – Сүйек екі рет лақтырылғандағы нәтижелер

	1	2	3	4	5	6
1						7
2					7	8
3				7	8	9
4			7	8	9	10
5		7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Жазылған сандармен белгіленген қажетті ұяшықтардың санын есептейміз: $m = 21$. Екі рет лақтыру кезінде ұпайлар қосындысының 6-дан үлкен болу ықтималдығы:

$$P = \frac{m}{n} = \frac{21}{36} = \frac{7}{12} \approx 0,58$$

Жауабы:0,58.

Есеп 11. Ойын сүйегі 9-дан асатын ұпайлардың қосындысы шыққанша лақтырылған. Бұл үшін үш лақтыру қажет болған ықтималдық қандай? Жауабын жүздікке дейін дөңгелектеңіз. (2024 жылғы ҰБТ, профильдік деңгей).

Шешуі. Үш рет лақтырғанда барлық мүмкін элементар оқиғалардың саны:

$$n = 6^3 = 216$$

Бізге тек үш лақтыру нәтижесінде ғана қажетті шарт орындалатын оқиғалар санын анықтау қажет. Алдымен, екі рет лақтыру нәтижесінде түскен ұпайлардың қосындысын қарастырып, олардың 9-дан асатын жағдайларын (10, 11 және 12) алып тастаймыз.

Кестенің оң жағында үшінші лақтыру нұсқалары мен есептеу алгоритмі көрсетіледі. Бұл алгоритм шартқа сәйкес келетін элементар оқиғалар санын анықтауға көмектеседі (үш лақтыру нәтижесінде ұпайлар қосындысы 9-дан үлкен). Үш лақтыру кезінде 9-дан үлкен ұпайлар қосындысын есептеу алгоритмі 3-кестеде берілген.

Кесте 3 – Сүйекті үш рет лақтыру кезіндегі ұпай кестесін есептеу алгоритмі

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	
5	6	7	8	9		
6	7	8	9			

6: (Ұяшықтарды санаймыз 9, 8, 7, 6, 5 және 4) $= 24 + 3 = 27$

5: (Ұяшықтарды санаймыз 9, 8, 7, 6 және 5) $= 20 + 4 = 24$

4: (Ұяшықтарды санаймыз 9, 8, 7 және 6) $= 15 + 5 = 20$

3: (Ұяшықтарды санаймыз 9, 8 және 7) $= 9 + 6 = 15$

2: (Ұяшықтарды санаймыз 9 және 8) $= 4 + 5 = 9$

1: (Ұяшықтарды санаймыз 9) = 4

Қолайлы жағдайлар саны:

$$m = 4 + 9 + 15 + 20 + 24 + 27 = 99$$

Үш лақтыру қажет болған ықтималдық:

$$P = \frac{m}{n} = \frac{99}{216} \approx 0,46.$$

Жауабы:0,46.

Біз бұл мақалада ықтималдықтар теориясына қатысты есептерді шешудің жолдарын көрсеттік. Оқушыларға тақырыпты жақсы түсіндіруге көмектесетін мысалдарды қарастырдық және формулаларды қай кезде қолдану керектігін атап өттік. Сонымен қатар ҰБТ есептерін жылдам және тиімді шығаруға көмектесетін ұсыныстар айтылды.

Комбинаторика және ықтималдықтар теориясы бөлімін терең меңгеру оқушылардың абстрактілі ойлауын, логикалық қабілетін, шығармашылық әлеуетін және күрделі мәселелерді талдау дағдыларын дамытуға ықпал етеді. Сондықтан мұғалім үшін комбинаторика мен ықтималдықтар теориясына қатысты есептердің маңызын түсіну, олардың құрылымын білу және тиімді шешу әдістерін меңгеру аса маңызды.

Зерттеу барысында:

- Комбинаторика мен ықтималдықтар теориясының математикалық білім берудегі рөлі мен маңызы анықталды;
- 10-сыныпта осы тақырыпты оқыту бойынша оқу бағдарламалары мен мектеп оқулықтарына талдау жүргізілді;
- Жоғары сынып оқушыларының есептерді шешу барысында кездесетін қиындықтары мен жиі жіберетін қателері зерттелді;
- Осы қиындықтарды ескере отырып, оқушыларға тиімді оқыту әдістемесі ұсынылды.

Зерттеу нәтижесінде комбинаторика мен ықтималдықтар теориясына байланысты есептерді шешу дағдыларын жүйелеу, кеңейту және тереңдету мүмкіндігі көрсетілді. Қойылған міндеттер толық орындалып, зерттеу мақсатына қол жеткізілді.

Қолданылған әдебиеттер тізімі:

1. Абылкасымова А.Е., Кучер Т., Корчевский В., Жумагулова З. Алгебра және анализ бастамалары. 10 сынып оқулығы. Алматы.: Мектеп 2019. – 241 б.
2. Әбілқасымов А.Е., Жұмағұлова З.Ә. Алгебра және анализ бастамалары. 11 сынып оқулығы. Алматы.: Мектеп 2019. – 168 б.
3. Виленкин Н.Я., Потапов В.Г. Задачник-практикум по теории вероятностей с элементами комбинаторики и математической статистики. М.: Просвещение, 1979, 114 с.
4. В.Е.Гмурман Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. М.: Высш. школа, 1979, 400 с.